SAGGIO GEOMETRICO

SULLA

TRIPLICAZIONE

E

SUBTRIPLICAZIONE

DI UN

ARCO DI CIRCOLO

DI

ANGELO DALLA VECCHIA

VICENZA
DALLA TIPOGRAFIA TREMESCHIN
1844.

254

LI 28. AGOSTO 1844.

Tutti sanno che Matematici valentissimi occuparonsi ne' trascorsi tempi del cotanto rinomato Problema della Subtriplicazione di qualunque arco di Circolo. Parecchie risoluzioni ne furono prodotte, o tentate, da cui al certo ebbe ad emergere chiaramente la scienza, e specialmente l'ingegno dei loro Autori. Però gli eruditi convennero, e convengono, che nessuno riescito sia ad un metodo così generale, e preciso quale desideravasi e si desidera tuttora.

Impresa ardua sempre, e forse anche vanitosa potrebbe quindi a prima giunta apparire, se da altri si cerchi ciò che da uomini prestantissimi venne indarno indagato. Sembra nondimeno che dalla taccia di ardito o di vano non potesse andare colpito chi non presuma, nè asserisca altrimenti di avere raggiunto indubbiamente lo

scopo, ma creda soltanto avere almeno tracciato, e di additare un nuovo cammino, che ricalcato in seguito da altri, condurre ve li potesse diritamente, e senza tema di errare.

Quanto colla presente Memoria io rendo di pubblica ragione non è che un Saggio quale appunto viene da me intitolato, ma un Saggio Geometrico nel quale cioè contengonsi in forma di dimostrazione i principii, e le nozioni geometriche che mi condussero al Metodo pratico e generale della proposta Subtriplicazione.

Premetto in essa cló che riguarda un Metodo da me ideato sulla triplicazione, giacchè dallo sviluppo di questo potei facilmente dedurre quello relativo alla Subtriplicazione. Mi parve senza esitanza cosi stretta la relazione fra li due tuttochè per se stessi opposti Problemi, che quanto viene esposto per l'uno, serva a chiarire e giustificare le basi e l'andamento dell'altro.

Procedendo alla Subtriplicazione reputai dover far principio da quella di un arco minore della Semicirconferenza; giacchè, come a tutti è noto, per questa un nuovo Metodo rigoroso e pratico non è a desiderarsi, né occorre realmente, onde da questo potere più agevolmente argomentare della convenienza o imperfezione del Metodo da me ideato per un arco qualunque di Circolo.

E benchè la soluzione del Problema di cui ebbi ad occuparmi offra fondati motivi per ritenere, che se vaglia per un arco minore della Circonferenza valer debba ugualmente per un arco molto minore di essa, cioè di un arco minore di un Quadrante di Circolo; tuttavia onde togliere le incertezze, che in taluno potessero insorgere,

ho pensato doverne aggiungere anche per questo ultimo caso apposito, e distinto teorico dettaglio.

Deggio inoltre dichiarare che nel corso degli studii da me dedicati a siffatto argomento non omisi di eseguire in più riprese e colla maggiore possibile diligenza delle materiali costruzioni sopra differenti archi di circolo, onde verificarne colle pratiche da me ideate la trisezione, e benché li risultati che ne ottenni non vagliano per se stessi a tener luogo di geometrica dimostrazione, non posso però dissimulare che tali siano stati da dovermi assicurare che alla precisione grafica corrispondano le teoriche illustrazioni da me sviluppate. Può ognuno, se gli piaccia, ripeterne le prove.

Comunque sia, e comunque dagl' intelligenti venisse giudicato, io faró conto in ogni caso a mia particolare istruzione delle ragionate eccezioni, che stimassero addurre in confronto. Che se un qualchè errore, in cui foss'io incorso porgesse ad altri motivo di vieppiù approfondarsi sul proposto oggetto, e di scoprire per tale occasione, siccome avvenne talvolta, la verità, sarebbe sempre per me di grande compiacenza l'avere tuttochè indirettamente cooperato all'incremento della scienza, al quale in preferenza ad ogni altro riguardo debbono rivolgersi le sollecitudini di coloro che per genio proprio la coltivano.

SAGGIO GEOMETRICO
SULLA TRIPLICAZIONE
DI UN ARCO DI CIRCOLO

Sia dato l'arco AI (Fig. I.) terza parte della semicirconferenza AHO.

Centro *I* con intervallo del raggio si descriva l'arco CX, il quale passerà necessariamente pel punto A. Si conduca la corda AI, ed il diametro ACO. Si divida per metà la semicirconferenza AO in H, si produca il raggio CH, e la corda AI sino ad incontrarsi al punto E. Dal punto I si conduca la corda IL parallela al diametro AO, e si avranno quindi i tre archi uguali AI, IL, LO. Ora essendo il triangolo AIC isoscele sarà l'angolo IAC=ICA; ma l'angolo ACE è retto, dunque l'angolo ICE=IEC, perció anche il triangolo CEI é isoscele, quindi il lato IE uguale al raggio IC. Dunque la secante AIE è uguale al diametro; condizione che dovrà verificarsi

anche nel caso della subtriplicazione dell'arco. Che se invece prolungata la CE si prenderà la CM uguale al diametro, e si condurrà la secante AGM, fatto centro G, con intervallo del raggio GC, l'arco CX in luogo di passare pel punto A intersecherà la circonferenza al punto Z, e si avrà l'arco AZ uguale all'arco GI. Ne viene quindi che se in continuazione all'arco AG si prenderà l'arco GI=AZ, si avrá determinato lo stesso arco AI dato di sopra, terza parte della semicirconferenza.

Sia ora da triplicarsi l'arco DH (Fig. II.) minore della terza parte della semicirconferenza.

Descritto col raggio HC l'arco CX, e preso sopra questo l'arco CK=DH, si conduca la retta HK sino ad incontrare la circonferenza al punto A. Da esso punto A si conduca il diametro ACL, e pel punto K il raggio CKY. Diviso poscia l'arco DL per metà in S, si produca la corda AH, ed il raggio CS sino al loro incontro al punto E. Si conduca finalmente il raggio CO paralello alla corda AH.

Poichè il raggio CO è parallelo alla corda AH, si avrà l'arco HO=KC, e dividerá l'arco LH per metà in O; e poichè l'arco KC=DH i tre archi DH, HO, OL saranno uguali, e quindi, come si é detto di sopra, la retta KHE uguale al diametro.

Essendo poi il raggio *C*KY paralello alla corda *DL*; ed essendo inoltre il triangolo D*C*L isoscele, e l'angolo A*C*D=D+Z, lo stesso raggio *C*KY dividerá per metà l'arco AD al punto Y, e sarà perpendicolare al diametro *CM*.

Si prolunghi, come sopra, la retta *CE*, finchè *C*M

sia uguale al diametro, e si conduca la secante AGM. Centro G con intervallo GC si descriva l'arco CX', il quale intersecherà la secante predetta in un punto interno *Z*. Condotto poscia il raggio *CZQ* si avrà l'arco *QY*, il quale risulta diversamente determinato dall'arco *AZ* (Fig. I.) ma però se si prolungherà la secante *MGA* sino ad incontrare l'arco *CX* in un punto esterno *Y*, e si condurrà dal centro la retta *CY*, questa taglierà fuori dalla stessa circonferenza l'arco *AT* nell'identico modo con cui viene tagliato l'arco *QY* (Fig. II.).

Difatti tanto il raggio AC quanto il raggio C*Y* sono perpendicolari allo stesso diametro *CM*, e quindi ne viene che se all'arco *AG* si aggiungerà l'arco *AT* non rimarrà a compiere l'arco Al che il piccolo arco *TZ*. E poichè la somma dei due archi *DG*, *QY* (Fig. II.) é costantemente minore dell'arco *DH*, così aggiungendosi ad essi due archi, un arco corrispondente a TZ si avrà l'intero arco DH. Tale risultato avrà sempre luogo qualunque sia per essere l'arco di circolo.

Tutto ció premesso a conoscenza delle idee che guidarono a versare sul propostosi Problema della Subtriplicazione, e ad anticipata illustrazione del modo avvisato onde risolverlo, se ne offre il susseguente analogo Saggio.

SAGGIO GEOMETRICO

SULLA SUBTRIPLICAZIONE

DI UN ARCO DI CIRCOLO

Sia l'arco *BK* (Fig. III.) minore della semicirconferenza .

Dal centro *C* al punto H metá dell'arco *BK*, si conduca la retta C*HM'* uguale al diametro, e la secante *M'FD'*. Centro *F* con intervallo *F*C si descriva l'arco C*X*, il quale intersecherá al punto *X* la predetta secante *M'FD'*. Si conduca quindi dal centro *C* la retta CX la quale taglierà la Circonferenza al punto *T'*, indi diviso l'arco *BD'* per metà con raggio C*A* si avrà l'arco *AT'*.
Ora essendo l'angolo BCD=B+*K*, sará il raggio C*A* parallelo alla corda *BK*, ma questa è perpendicolare alla retta C*M'* dunque il raggio *A*C sarà perpendicolare allo stesso diametro CM'. Si produca il raggio BC in O, ed il raggio *A*C in *N*.

Ció posto, si prenda in continuazione dell'arco *BF* l'arco $FG = AT'$, e diviso l'arco *GK* per metà in *L*, fatto centro nei punti *G*, *L* con intervallo del raggio si descrivano due piccoli archi, i quali si taglieranno in *S*. Dal punto *D'* al punto *S* si conduca la retta D'S, e poichè i tre punti S, G, D' non si trovano nella medesima direzione, cosi condotta la retta SG, incontrerà questa la circonferenza superiormente al punto D' estremità dell'arco BD', cosichè la detta retta D'S taglierà l'arco FG in punto I intermedio fra gli altri due F, e G. Si divida l'arco IL per metá in *È*, e l'arco EH per metà col raggio C*T* che si prolungherà indifinito, e dal punto L con intervallo del raggio LC si descriva il piccolo arco D. Si prendano in seguito i due archi *OR* *MN* uguali, ciascuno all'arco TH metà dell'arco EH, indi dal punto D pel punto *L*, si prolunghi il raggio D*L* fino ad incontrare in un punto *Y* il raggio C*R*. Finalmente si faccia l'angolo $COP = CYL$, e si prolunghi la corda *OP* sino il suo incontro *N'* colla perpendicolare C*M'*.

Poichè l'angolo $COP = CYL$, e l'angolo $OCN = RCM$ (essendo l'arco $NO = MR$) i due angoli CZP, CQL sono uguali. Ora l'angolo $\acute{M}CN$ è retto. Inoltre essendo l'arco $MN = TH$, sará pure retto anche l'angolo DCM. Ma il triangolo C*L*D è isoscele, dunque l'angolo $LQC = LCQ$. Ma l'angolo $LQC = CZP$, dunque l'angolo $CZP = LCQ$. E poichè l'angolo LC*Q* è misurato dall'arco LM, e l'angolo $CZP = \frac{AP + NO}{2}$ dunque i due archi $\frac{AP + NO}{2} = LM$. Si prenda quindi l'arco $KE = AP$, e levato di comune l'arco *EP* si avrà l'arco $AE = PK$, e quindi la corda EP, sarà

paralella alla corda AK, e l'angolo $CEP=ASE$. Ma l'angolo $ASE=ACE+SAC$ ovvero NAK ch'è misurato dall'arco $\frac{KN}{2}=\frac{AB}{2}$, dunque l'angolo $CEP>ACE$ della metà dell'angolo ACB. Essendo poi i due triangoli ACE, ECP isosceli, si avrà l'angolo $CEA>CEP$ della metà dello stesso angolo ACB, e così dicasi dell'angolo CAE col suo corrispondente CPE, perciò la somma dei due angoli $CEA+CAE>CEP+CPE$ dell'intero angolo ACB, e quindi l'angolo $ECP>ACE$ dello stesso angolo ACB, cioè l'arco $EP=AE+NO=\frac{AP+NO}{2}=\frac{EN}{2}$, ed in conseguenza l'arco $EP=PN=LM$, sicché levato di comune dei due archi uguali PN, LM, l'arco PM, si avrà l'arco $LP=MN$. Ma l'arco $MN=TH$, dunque l'arco $LP=TH$, e quindi l'angolo $HCP=LCT$, e i due triangoli CLD, CPN' uguali ed isosceli, perciò il lato $CD=CN$.

Si considerino i due triangoli OCN', DCY i quali essendo il lato $DC=NC$ e gli angoli rispettivamente uguali, sono uguali, e quindi la secante $DLY=NOP$ dovrà necessarlamente incontrare il punto R estremitá del raggio CR, è perciò la corda $PO=LR$, ed il lato $LD=PN'$, ma LD é uguale al raggio, dunque lo stesso lato PN uguale al raggio. Ma allorché una secante la quale procede dall'estremità del diametro di un dato arco, e lo interseca in modo che prolungato esso incontri un'altra retta condotta dal centro, la quale divide questo medesimo arco per metá, se la parte esterna della secante sará uguale al raggio l'arco dato sará subtriplicato, dunque l'arco PK sarà la terza parte dell'arco BK, cosichè con-

dotta la secante D'L'N', si avrà tutto l'arco BK diviso in tre parti uguali cogli archi BL',L'P,PK .

Sia l'arco BK (Fig. IV.) minore di un Quadrante. Per quanto rimane a praticarsi, e pronunciarsi in questo ultimo caso non occorre che riferirsi a quanto fu esposto superiormente.

FINE

Fig. I.
Y
Z
T
X'
A
X
C
O
G
I
L
H
E
M

Fig. II.

Fig. III.

Fig. IV.
D'
O
R
T'
A
X
C
Z
N
M
E
B
K
L'
F
G
E'
H
L
P
N'
M'
Premiata Ortotipia
di Gius. Ant. Tremeschin Vic.